**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования**

**"Уфимский университет науки и технологий"**

**Кафедра** Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

**Дисциплина:** Математическое моделирование.

**Отчет по лабораторной работе № 2**

**Тема:** «Моделирование динамики популяций»

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Группа ПМ-455 | Фамилия И.О. | Подпись | Дата | Оценка |
| Студент | Галямова А.З. |  |  |  |
| Принял | Лукащук С.Ю. |  |  |  |

**Уфа 2024**

**Цель работы:** получить навык численно-аналитического исследования математических моделей биологии, описывающих динамику популяций.

**Задача 1**

Рассматривается обобщенная логистическая модель:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

описывающая динамику распространения короновируса.

Параметры определяются индивидуально в зависимости от варианта.

1. Построить аналитическое решение уравнения.

2. Найти стационарные точки уравнения и выполнить анализ их устойчивости в зависимости от исходных данных задачи. Построить графики соответствующих решений.

3. Выполнить конечно-разностную дискретизацию уравнения по схеме Эйлера и показать, что она сводится к логистическому отображению

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

4. Определить аналитически первые четыре стационарные точки логистического отображения и выполнить анализ их устойчивости.

5. Построить бифуркационную диаграмму отображения и численно определить первые шесть точек бифуркации. По найденным значениям рассчитать приближения к числу Фейгенбаума

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где – бифуркационные значения параметра для -го цикла удвоения.

6. Найти значения параметра r при которых происходит расщепление решения на три ветви (трифуркация).

**Задача 2**

Рассмотреть обобщенную модель взаимодействия двух популяций типа хищник-жертва:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где – размер популяции «жертв», – размер популяции «хищников».

Вид функций определяется индивидуально в зависимости от номера варианта.

Для модели выполнить следующее:

1. Дать биологическую интерпретацию модели;
2. Выполнить обезразмеривание модели с целью уменьшения количества значимых коэффициентов;
3. Численно-аналитически найти стационарные точки модели и определить их тип;
4. Исследовать найденные стационарные точки на устойчивость, построить в окрестности каждой стационарной точки фазовый портрет.

**Практическая часть**

**Задача I**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | k |  |
| Нидерланды | 41950 | 3,573 | 0,7 |

Обобщенная логистическая модель:

Сформулируем задачу Коши:

1) Аналитическое решение уравнения:

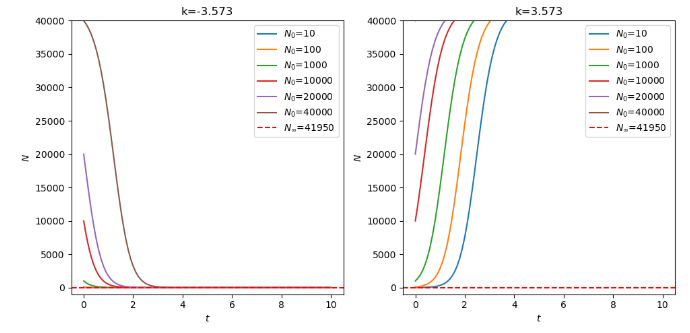
Из н.у. получаем:

2) Найти стационарные точки уравнения и выполнить анализ их устойчивости в зависимости от исходных данных задачи. Построить графики соответствующих решений

Модель имеет две стационарные точки , исследуем их на асимптотическую устойчивость. Для этого разложим правую часть уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки . В близи этой точки всегда можно выделить достаточно малую окрестность, где вклад нелинейных членов пренебрежимо мал, так что можно откинуть члены порядка два и выше. Получим:

В окрестности :

при , поэтому стационарная точка устойчива при .



*Рисунок 1. Динамика популяции вируса при и различных начальных размерах популяции для точки 0*

В окрестности :

при , поэтому стационарная точка устойчива при .

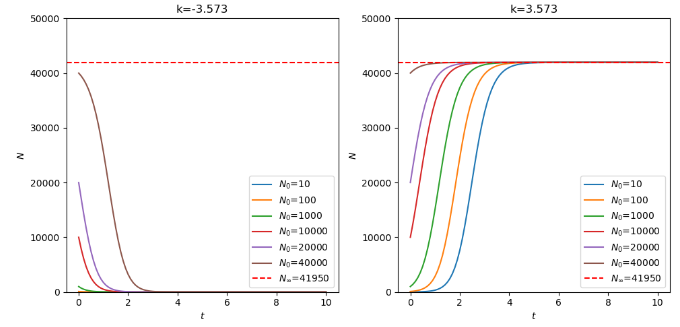


Рисунок 2. Динамика популяции вируса при и различных начальных размерах популяции для точки

3) Выполнить конечно-разностную дискретизацию уравнения по схеме Эйлера и показать, что она сводится к обобщенному логистическому отображению:

Численная схема Эйлера:

Конечно-разностная дискретизация сводится к обобщенному логистическому отображению.

4) Определить аналитически первые четыре стационарные точки обобщенного логистического отображения и выполнить анализ их устойчивости.

Пусть

Для нахождения первых двух стационарных точек необходимо решить уравнение:

Первые две стационарные точки:

Так как логистическое отображение, то .

Тогда границы для :

Условие устойчивости стационарных точек

Найдем циклы периода два:

Подставив одно уравнение в другое получим следующее уравнение:

После замены :

Произведём замену :

Произведём замену :

Разложим уравнение в ряд Тейлора, предположив, что членами степени 4 и больше (чтобы в итоге стало квадратное уравнение):

Одним из корней уравнения является число , т.е. – найденная ранее стационарная точка. После преобразований:

Решение для :

Соответственно:

5) Построить бифуркационную диаграмму отображения и численно определить первые шесть точек бифуркации. По найденным значениям рассчитать приближения к числу Фейгенбаума

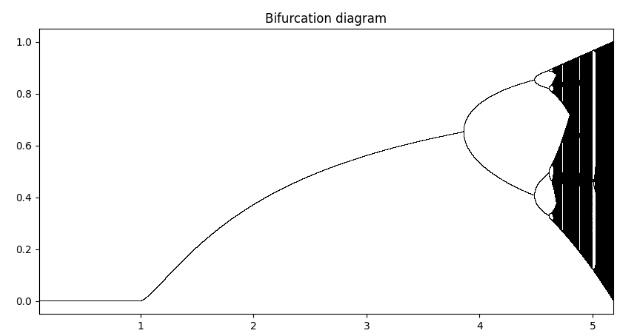


Рисунок 3. Бифуркационная диаграмма

Найденные численно точки бифуркации:

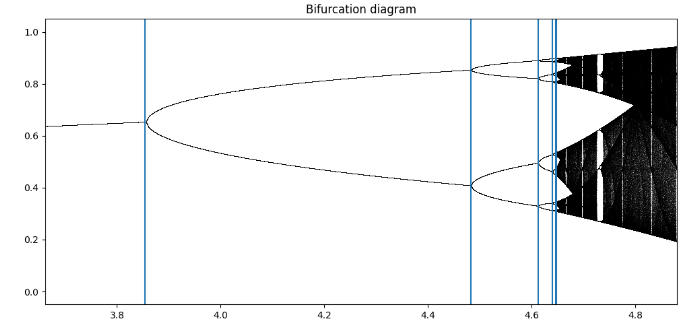


Рисунок 4. Первые точки бифуркации, найденные численно

Приближение к числу Фейгенбаума:

6) Найти значения параметра r при которых происходит расщепление решения на три ветви (трифуркация)

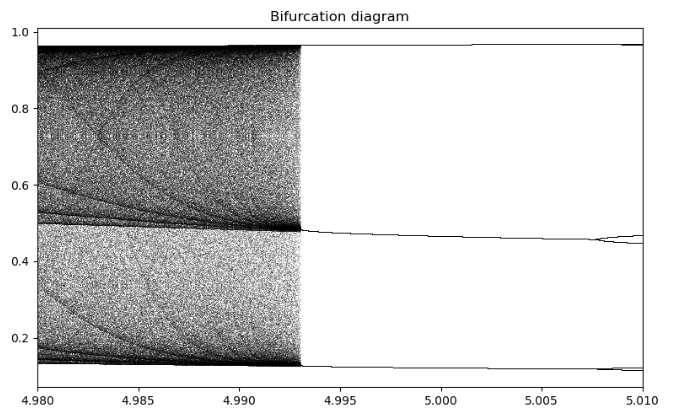


Рисунок 5. Бифуркационная диаграмма в области тройного цикла.

Численно точка трифуркации равна: *.*

**Задача II**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | b(x,y) | c(y) | d(x,y) |
| A | B | Cy |  |

Согласно варианту, коэффициенты преобразуют заданную систему в вид:

где – положительные константы.

1. Дать биологическую интерпретацию модели.

численность «жертв»;

численность «хищников»;

– вероятностивстречи «хищника» и «жертвы»;

– скорость изменения количества жертв во времени, определяется размножением и убылью жертв из-за поедания хищниками;

– скорость изменения количества хищников во времени;

A – коэффициент прироста жертв;

B – коэффициент выедания хищниками жертв;

C – коэффициент вымирания хищников;

D – конкуренция хищников за жертв;

G – плотность популяции хищника, при которой скорость размножения равна максимальной при условии избытка жертв(при которой скорость размножения составляет половину максимальной). Другими словами, при возрастании численности хищников, уменьшается скорость выедания жертв.

- линейно зависит от размера популяции жертв. Отражает скорость размножения жертв в отсутствии хищников.

– смертность жертв.

- популяция хищников убывает квадратично. Естественная убыль происходит за счет внутривидовой конкуренции за одни и те же ресурсы, количество которых недостаточно для всех(чем их больше, тем меньше еды достается каждому).

- рождаемость хищников снижается с ростом популяции жертв. Наличие говорит о конкуренции за жертву.

1. Выполнить обезразмеривание модели с целью уменьшения количества значимых коэффициентов.

Пусть , тогда система примет вид:

Если:

Модель зависит от двух параметров .

1. Численно-аналитически найти стационарные точки модели и определить их тип, исследовать их на устойчивость, построить фазовый портрет в окрестности.

Для этого потребуется решить систему относительно :

1. решение .

Линеаризация системы в данной точке:

Собственные значения:

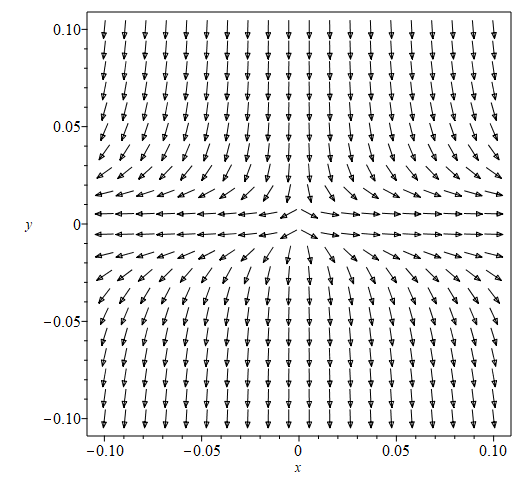


Рисунок 5. Фазовый портрет в окрестности (0;0)

1. решение

Линеаризация системы в данной точке:

Собственные значения:

то . Получаем устойчивый узел.

Изображение выглядит как линия, диаграмма, снимок экрана, График

Автоматически созданное описание

*Рисунок 6 - .*

то . Получаем устойчивый узел.

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, линия, Параллельный

Автоматически созданное описание

*Рисунок 7 - .*

то Re. Получаем устойчивый фокус.

1. Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, круг

   Автоматически созданное описание

*Рисунок 8 - .*

Изображение выглядит как снимок экрана, График, диаграмма, линия

Автоматически созданное описание

*Рисунок 8 – В синий области дискриминант отрицательный, в красной положительный, на зеленой кривой равняется нулю.*

**Вывод:** В ходе выполнения лабораторной работы были достигнуты следующие результаты: В задании 1, была исследована обобщенная логистическую модель, определили стационарные точки, проведён анализ их устойчивости и выявили точки бифуркации; в задании 2 была рассмотрена модель взаимодействия «хищник-жертва», дана ей биологическую интерпретацию и проведён анализ стационарных точек, построены их фазовые портреты